به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل سوم-مشتق

در این کاربرگ سعی خواهیم کرد که مفهوم مشتق و خط مماس را بررسی کنیم. ابتدا تعریف مشتق را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱. تابع $f : S \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید a نقطه‌ای درونی از S است، یعنی عددی مثبت مانند δ وجود دارد که بازه $(a-\delta, a+\delta)$ در S قرار دارد. در این صورت f را در نقطه a مشتق‌پذیر می‌نامیم اگر

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وجود داشته باشد. مقدار این حد را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق f در نقطه a می‌نامیم. تابع f را مشتق‌پذیر می‌نامیم اگر در همه نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد.

فعالیت ۱.

الف) ثابت کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^n$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را در هر نقطه حساب کنید.

ب) مشتق توابع $\sin(x)$ و $\cos(x)$ را بدست آورید.

حال که تعریف مشتق را می‌دانیم خوب است در مورد مفهوم مماس بودن دو تابع کمی مداقه کنیم. به نظر شما چه وقت دو تابع بر هم مماس هستند؟ به طور خاص، اگر یکی از توابع را یک خط در نظر بگیریم چه وقت می‌توان گفت یک خط بر یک تابع مماس است؟

فعالیت ۲.

الف) آیا خط $y = x$ بر تابع $f(x) = x^3$ در نقطه صفر مماس است؟

ب) آیا خط $y = 0$ بر تابع $f(x) = x^3$ در نقطه صفر مماس است؟

ج) آیا تابع $g(x) = x^2$ بر تابع $f(x) = x^3$ در نقطه صفر مماس است؟

د) آیا تابع $g(x) = x^2$ بر تابع $f(x) = x^3 + x$ در نقطه صفر مماس است؟

چه فرقی بین حالت (الف) و (ب) وجود دارد؟ در هر دو حالت، هم دو تابع در نقطه داده شده مقدارشان یکسان است و هم تفاضل مقدار دو تابع با نزدیک شدن به نقطه برخورد به صفر میل می‌کند. در قسمت‌های (ج) و (د) نیز وضع به همین شکل است. پس تفاوت در چیست که در یکی می‌گوییم مماس هستند و در دیگری نه. به نظر می‌آید آنچه که در مماس بودن مهم است، سرعت همگرایی تفاضل‌ها به صفر است. بنابراین تعریف زیر را برای مماس بودن دو تابع، به خصوص مماس بودن یک خط بر تابع، ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲. فرض کنید $f, g : S \to \mathbb{R}$ دو تابع و $x_\circ$ نقطه‌ای از S باشد. می‌گوییم f بر g در $x_\circ$ مماس است، در صورتی که این دو شرط برقرار باشند: الف) $f(x_\circ) = g(x_\circ)$ و ب) $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ} = \circ$.

فعالیت ۳.

الف) نشان دهید که دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^۲ + |x|$ در نقطه صفر بر هم مماس هستند. توجه کنید هر دو تابع در نقطه صفر مشتق‌پذیر نیستند.

ب) نشان دهید تابع $g(x) = f(x_\circ) + m(x - x_\circ)$ بر تابع $f(x)$ در نقطه $x_\circ$ مماس است، اگر f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد و $m = f'(x_\circ)$.

حال چند گزاره در مورد توابع مشتق‌پذیر بیان می‌کنیم و برخی از آنها را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۳. اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

گزاره ۴. فرض کنید تابع‌های f و g در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت

الف) تابع $f+g$ در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f+g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$.

ب) تابع $f \cdot g$ در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(f \cdot g)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ).$$

ج) اگر $g(x_\circ) \neq \circ$؛ تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_\circ) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)^۲}.$$

فعالیت ۴.

الف) گزاره ۳ را ثابت کنید.

ب) گزاره ۴ قسمت (ب) را ثابت کنید.

گزاره ۵. فرض کنید $f'(x_\circ) > \circ$. در این صورت عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$ و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$.

گزاره ۶. فرض کنید $f'(x_\circ) < \circ$. در این صورت عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$ و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$.

تعریف ۷. برای تابع $f : S \to \mathbb{R}$ نقطه $x_\circ$ از S را نقطه ماکسیمم موضعی (نقطه مینیمم موضعی) می‌نامند، هرگاه عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد که به ازای هر x در S که $|x-x_\circ| < \delta$، $f(x) \leq f(x_\circ)$ ($f(x) \geq f(x_\circ)$).

گزاره ۸. اگر تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $x_\circ$ از S ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی داشته باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_\circ) = \circ$.

فعالیت ۵.

الف) گزاره ۵ را ثابت کنید.

ب) با استفاده از گزاره‌های ۵ و ۶، گزاره ۸ را اثبات کنید.

ج) نشان دهید تابع $f(x) = x + ۲x^۲ \sin(\frac{۱}{x})$ ($f(\circ) = \circ$) در صفر مشتق آن مثبت است ولی در هیچ بازه‌ای حول صفر صعودی نیست.

به وضوح عکس این گزاره ۸ درست نیست، یعنی اگر مشتق تابع در نقطه‌ای برابر با صفر باشد، لزوما آن نقطه، نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی نیست. برای این منظور مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۶. تابع همه جا مشتق‌پذیر $f(x) = x - \sin(x)$ را در نظر بگیرید. آیا این تابع نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی دارد؟ نقاطی که در آن مشتق صفر می‌شوند را بیابید.

قضیه ۹ (قضیه رُل)**.** فرض کنید تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته و در همه نقاط درونی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت، نقطه‌ای بین a و b مانند c وجود دارد که $f'(c) = 0$.

قضیه ۱۰ (قضیه مقدار میانگین)**.** فرض کنید تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته در همه نقاط درونی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ و

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

فعالیت ۷.

الف) قضیه ۹ را ثابت کنید.

ب) قضیه ۱۰ را ثابت کنید.

ج) در مورد تعداد ریشه‌های معادله $x^n + ax + b = 0$ بحث کنید.

د) نشان دهید به ازای هر دو عدد حقیقی α و β،

$$|\sin(\alpha) - \sin(\beta)| \leq |\alpha - \beta|.$$

ه) در حالت کلی، برای $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ نشان دهید اگر $|f'(x)| < M$ در بازه $[a, b]$، داریم

$$|f(b) - f(a)| < M|b - a|. \tag{۱}$$

در واقع کران‌داری مشتق، در مورد رشد و نمو تابع اطلاعاتی بدست می‌دهد که نامساوی (۱) بیانگر آن است.